Tarea examen 1

Fecha de asignación	**4 de septiembre**
Fecha de entrega	**11 de septiembre**
Puntos requeridos	**15**
Puntos máximos posibles	**27**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 15 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

En lo que sigue, sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto de $\mathbb{R}^n$. Recuerda que definimos $C^\infty(\mathcal{U})$ como:

$$C^\infty(\mathcal{U}) := \{f : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty\}.$$

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ y un punto $p \in \mathcal{U}$ definimos *la derivada direccional de f en p en la dirección v* como:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(p+tv) - f(p)\Big)$$

Utilizaremos la notación $v(f)$, $D_v f$ o $D_p f(v)$ para dicha derivada direccional.

Ejercicio 1 — 1 Pt

Dado un punto arbitrario $p \in \mathcal{U}$, **demuestra** que la asignación $f, v \mapsto D_p f(v)$ es una función bilineal:

$$C^\infty(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

En particular, dada cualquier función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ da lugar a un elemento de $(\mathbb{R}^n)^*$. Denotaremos dicho elemento por df_p.

Dada una función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, definimos un $\binom{0}{1}$-campo tensorial por:

$$d(f)(p) = df_p.$$

Ejercicio 2 — 1 Pt

Demuestra que el campo tensorial $d(f)$ es diferenciable y que la función

$$d : C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathcal{T}_1^0(\mathcal{U})$$

es $\mathbb{R}$-lineal.

Ejercicio 3 — 1 Pt

Dadas dos funciones $f, g \in C^\infty(\mathcal{U})$, **demuestra** la regla de Leibniz:

$$d(fg) = g d(f) + f d(g)$$

Ejercicio 4 — 1 Pt

Demuestra que todo $\binom{0}{1}$-campo tensorial $\omega \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{U})$ se puede expresar como:

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i$$

donde $f_i \in C^\infty(\mathcal{U})$ y $dx^i = d(x^i)$.

Ejercicio 5 1 Pt

Demuestra que para cualquier función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ se cumple:

$$d(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathcal{U}$ una curva diferenciable y sea $\omega \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{U})$ un $\binom{0}{1}$-campo tensorial sobre $\mathcal{U}$.
Definimos *la integral de ω a lo largo de γ* como:

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))dt$$

Ejercicio 6 2 Puntos

Demuestra que la integral es $\mathbb{R}$-lineal sobre el integrando, y aditiva sobre el dominio (considerando orientacion), es decir, dados $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{U})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se cuple:

$$\int_\gamma \omega_1 + \lambda\omega_2 = \int_\gamma \omega_1 + \lambda \int_\gamma \omega_2.$$

Si $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ y $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$ con $c \in [a,b]$, etonces:

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \lambda \int_{\gamma_2} \omega_1.$$

Y además, si $\tilde{\gamma}$ es γ con la orientación inversa, entonces:

$$\int_{\tilde{\gamma}_1} \omega_1 = -\int_\gamma \omega_1.$$

Ejercicio 7 1 Pt

Demuestra que si $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ y γ es una curva en $\mathcal{U}$, entonces se cumple:

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Ejercicio 8 1 Pt

Sea $\omega = ydx - xdy \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^2)$. **Demuestra** que no existe ninguna función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $d(f) = \omega$.
Sugerencia: exhibe una curva cerrada tal que la integral de ω a lo largo de dicha curva no sea cero.

Sea $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ una transformación diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Sea $\omega \in \mathcal{T}_1^0(\mathcal{V})$ un campo tensorial sobre $\mathcal{V}$.

Definimos un nuevo campo tensorial que denotaremos $\varphi^*(\omega)$ y que se conoce como *el pullback de ω bajo φ* como sigue: dado un punto $p \in \mathcal{U}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ definimos:

$$\varphi^*(\omega)(p)(v) := \omega_{\varphi(p)}(D_p(\varphi)(v)).$$

Ejercicio 9 2 Puntos

Demuestra que si $\omega = \sum_{i=1}^m f_i dx^i$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi^*(\omega) &= \sum_{i=1}^m (f_i \circ \varphi) d(\varphi^i) \\ &= \sum_{i=1}^m f_i \circ \varphi \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_j} dx^j \right)\end{aligned}$$

donde $\varphi^i := x^i \circ \varphi$ es la i-esima componente de φ.

Ejercicio 10 1 Pt

Sean φ y ω como antes y sea $\gamma : [a, b] \to \mathcal{U}$ una curva diferenciable. **Demuestra** que:

$$\int_\gamma \varphi^*(\omega) = \int_{\varphi\circ\gamma} \omega$$

Sea g_E el $\binom{0}{2}$-campo tensorial sobre $\mathbb{R}^n$ dado por:

$$g_E = \sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i.$$

Recuerda que si $b \in T_2^0(V)$ es una forma bilineal sobre un espacio vectorial V, entonces b da lugar a una transformación lineal $V \to V^*$ definida por:

$$v \mapsto [w \mapsto b(v, w)].$$

Decimos que b es *no degenerada* si dicha transformación es un isomorfismo. En ese caso, decimos que $v \in V$ y $\alpha \in V^*$ son b-duales (o duales bajo b) si para cualquier $w \in V$ se cumple:

$$b(v, w) = \alpha(w).$$

Ejercicio 11 1 Pt

Demuestra que para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ $g_E(p)$ es no degenerada.

Dada cualquier función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ y $p \in \mathcal{U}$ definimos el *gradiente de f en p con respecto a g_E* como el vector g_E-dual a $d(f)(p)$. **Demuestra** que dicho vector es igual a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right).$$

Ejercicio 12 2 Puntos

Sea $\mathcal{A}_{\text{can}}$ el único atlas maximal que contiene al atlas $\{(\mathbb{R}^2, Id, \mathbb{R}^2)\}$. Y sea $\mathcal{A}$ el único atlas maximal que contiene al atlas $\{(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^2)\}$, donde $\varphi(x, y) = (x, y + |x|)$. **Demuestra** que existe un difeomorfismo entre las variedades diferenciables $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{\text{can}})$ y $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A})$.

Ejercicio 13 1 Pt

Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos atlas sobre la variedad topológica X. **Demuestra** que las siguientes son equivalentes:

- $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un atlas.
- El atlas maximal que contiene a $\mathcal{A}_1$ contiene a $\mathcal{A}_2$

- La función identidad $Id : X \to X$ es un difeomorfismo como función $(X, \mathcal{A}_1) \to (X, \mathcal{A}_2)$.

Ejercicio 14 — 1 Pt

Sean $(X, \mathcal{A}_X)$ y $(Y, \mathcal{A}_Y)$ dos variedades diferenciables. **Demuestra** que existe un único atlas diferenciable maximal que contiene a los productos de cartas de $\mathcal{A}_X$ con cartas de $\mathcal{A}_Y$.

Ejercicio 15 — 3 Puntos

Considera la relación de equivalencia $\sim$ sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(x, y) \sim (w, z) \Leftrightarrow (x - w, y - z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ la proyección sobre el cociente. **Demuestra** que existe un único atlas diferenciable $A_\sim$ sobre $\mathbb{R}^2$ que cumple las siguientes propiedades:

- La función π es diferenciable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{\text{can}}) \to (\mathbb{R}^2/\sim, \mathcal{A}_\sim)$
- Para cualquier variedad $Y, \mathcal{A}_Y$ y función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow Y$, si φ es invariante bajo traslaciones enteras, entonces existe una única función diferenciable $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2/\sim \to Y$ que cumple $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^2/\sim \\
X \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 16 — 1 Pt

Una *derivación en p* es una función $\mathbb{R}$-lineal $\partial : C^\infty(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ que cumple:

$$\partial(fg) = f(p)\partial(g) + \partial(f)g(p).$$

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$ y un punto $p \in \mathcal{U}$ define la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} C^\infty(\mathcal{U}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto D_p f(v) \end{aligned}$$

Demuestra que dicha asignación es una derivación.

Ejercicio 17 — 1 Pt

Dado un campo vectorial X definido sobre un abierto $\mathcal{U}$ se cumple que

$$X = \sum_{i=1}^{n} X(x^i)\partial_i$$

Ejercicio 18 — 1 Pt

Dada una función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$, un punto $p \in \mathcal{U}$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ las siguientes son equivalentes:

- $v(f) = 0$
- v es g_E ortogonal al gradiente de f en p
- v está en el núcleo de la diferencial de f en p
- Para toda curva γ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot\gamma(0) = v$ se cumple que:

$$\frac{df \circ \gamma}{dt} = 0.$$

Ejercicio 19 — 1 Pt

Dado un campo tensorial $\omega \in \mathcal{T}^1_1(\mathcal{U})$ podemos definir una función T_ω:

$$\begin{aligned} T_\omega : \mathcal{T}^0_1(\mathcal{U}) \times \mathcal{T}^1_0(\mathcal{U}) &\to C^\infty(\mathcal{U}) \\ \alpha, X &\mapsto [p \mapsto \omega_p(\alpha_p, X_p)] \end{aligned}$$

Demuestra que T_ω es $C^\infty(\mathcal{U})$ bilineal. Es decir, es $\mathbb{R}$-bilineal y además, para cualquier función $f \in C^\infty(\mathcal{U})$ y campos tensoriales α, X se cumple que

$$T_\omega(f\alpha, X) = T_\omega(\alpha, fX) = fT_\omega(\alpha, X).$$

Ejercicio 20 — 1 Pt

Inversamente, **demuestra** que toda función $C^\infty(\mathcal{U})$-bilineal $T : \mathcal{T}^0_1(\mathcal{U}) \times \mathcal{T}^1_0(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ es igual a T_ω para algún campo tensorial $\omega \in \mathcal{T}^1_1$.

Ejercicio 21 — 2 Puntos

Considera los conjuntos:

$$L = \{X \subseteq \mathbb{H} | X \text{ es la intersección de una recta vertical con } \mathbb{H}\}$$

$$C = \{X \subseteq \mathbb{H} | X\text{es un círculo cuyo centro está en el eje } x \text{ intersectado con } \mathbb{H}\}$$

Dados a, b, c, d tales que $ad - bc \neq 0$, **demuestra** que la transformación (en notación compleja) dada por:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

induce una biyección de $L \cup C$ a $L \cup C$.