Geometría riemanniana

Tarea examen 2

Fecha de asignación	**3 de octubre**
Fecha de entrega	**10 de octubre**
Puntos requeridos	**15**
Puntos máximos posibles	**23**

Esta tarea aporta 15 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1 — Formas de volumen — 6 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

Una *forma de volumen* ω sobre V es un $\binom{0}{n}$-tensor antisimétrico y no-degenerado.

Es decir, $\omega \in T_n^0(V)$ y se cumple:

- para cualesquiera $v_1, \ldots, v_n \in V$ e índices $i \neq j$ se cumple:

$$\omega(v_1, \ldots v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = -\omega(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_n).$$

- Si $v_1 \ldots, v_n$ es una base de V, entonces $\omega(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Decimos que una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ está *orientada positivamente* con respecto a la forma de volumen ω si

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

(a) (1 punto) **Demuestra** que dada una base $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V existe una única forma de volumen ω_β tal que

$$\omega_\beta(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

(b) (1 punto) Si $v_j = \sum \lambda_j^i e_i$ son n vectores arbitrarios, **obtén** una fórmula para

$$\omega_\beta(v_1, \ldots, v_n).$$

(c) (2 puntos) Sea $g \in T_2^0(V)$ un producto interno sobre V.
Sean $g_{ij} := g(e_i, e_j)$ los coeficientes del tensor con respecto a la base β.
Sea $\gamma = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de V con respecto al producto interno g.
Demuestra que se tiene la siguiente igualdad entre formas de volumen:

$$\omega_\gamma = \pm\omega_\beta \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

Donde el signo es positivo si γ está orientada positivamente y negativo si no.

(d) (2 puntos) Sean (M, g) es una variedad riemanniana y $\omega \in \mathcal{T}_n^0(M)$ un campo tensorial tal que en todo punto $p \in M$ el tensor ω_p es una forma de volumen en T_pM.
Demuestra que existe un único campo tensorial $dV \in \mathcal{T}_n^0(M)$ que cumple:

- En todo punto $p \in M$ el tensor dV_p es una forma de volumen sobre T_pM.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ es un marco en un abierto $\mathcal{U} \subseteq M$ tal que para todo punto $p \in \mathcal{U}$ la base $\{X_i(p)\}$ es una base positivamente orientada con respecto a ω_p, entonces

$$dV(X_1, \ldots, X_n) = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

donde g_{ij} son los coeficientes de g con respecto al marco dado.

Ejercicio 2 — La esfera 7 puntos

Sea $\mathbb{S}^n_R \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera de radio $R > 0$ en el espacio euclideano de dimensión $n+1$.

(a) (1 punto) **Demuestra** que $\mathbb{S}^n_R$ es una subvariedad n dimensional de $\mathbb{R}^{n+1}$ y **obtén** una descripción explícita de $T_p\mathbb{S}^n_R$ como subespacio de $T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

Sea g la métrica inducida sobre $\mathbb{S}^n_R$ a partir de la métrica euclideana sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Es decir $g = i^*(g_E)$ donde $i : \mathbb{S}^n_R \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la inclusión.

(b) (1 punto) **Calcula** los coeficientes de la métrica g en las cartas coordenadas que se obtienen a partir de las proyecciones de $\mathbb{S}^n_R$ en los hiperplanos coordenados.

(c) (1 punto) Sea $M \in O(n+1)$ una matriz ortogonal. **Demuestra** que la acción lineal de M en $\mathbb{R}^{n+1}$ se restringe a un difeomorfismo $\varphi_M : \mathbb{S}^n_R \to \mathbb{S}^n_R$.
Dado $p \in \mathbb{S}^n_R$ **calcula** $T_p\varphi_M : T_p\mathbb{S}^n_R \to T_{\varphi_M(p)}\mathbb{S}^n_R$ y concluye que φ_M es una isometría de $(\mathbb{S}^n, g)$.

(d) (1 punto) **Demuestra** que para cualesquiera dos puntos p y $q \in \mathbb{S}^n_R$ y bases ortonormales

$$\beta_1 = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq T_p\mathbb{S}^n_R$$

$$\beta_2 = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq T_p\mathbb{S}^n_R$$

existe una matriz ortonormal $M \in O(n+1)$ tal que:

- $\varphi_M(p) = q$
- $T_p\varphi_M(u_i) = w_i$.

La *proyección esterográfica* se define como la transformación ψ de $\mathbb{S}^n_R \setminus \{(0, \ldots, 0, R)\}$ a $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ tal que $\psi(p), p$ y $(0, \ldots, 0, R)$ son colineales. A $N = (0, \ldots, 0, R)$ usualmente se le llama el *polo norte*.

(e) (1 punto) **Obtén** una fórmula para ψ y demuestra que es un difeomorfismo.

(f) (2 puntos) **Calcula** los coeficientes de la métrica en la carta coordenada dada por ψ.

Ejercicio 3 — El espacio hiperbólico 10 puntos

La *métrica de Minkowski* $m \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^{n+1})$ es el campo tensorial:

$$m = dx_1 \otimes dx_1 + \ldots + dx_n \otimes dx_n - d\tau \otimes d\tau$$

donde $x_1, \ldots, x_n, \tau$ denotan las coordenadas cartesianas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Nota que m es simétrico y no degenerado, pero no es una métrica riemanniana. A este tipo de métricas se les llama métricas *lorentzianas*. Sea $R > 0$ y sea $\mathbb{H}_R^n$ la hoja superior ($\tau > 0$) del hiperboloide de dos hojas dado por la ecuación:

$$\tau^2 - \sum x_i^2 = R^2.$$

Sea $g = i^*(m)$ la métrica inducida sobre $\mathbb{H}_R^n$ a partir de la métrica de Minkowski.

(a) (1 punto) **Demuestra** que $\mathbb{H}_R^n$ es una subvariedad de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$ y **obtén** una descripción explícita de $T_p\mathbb{H}_R^n$ como subespacio de $T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) (1 punto) **Demuestra** que g es una métrica riemanniana.

Sea $S = (0, \ldots, 0, -R)$ y sea $\mathbb{B}_R^n :- \{(x_1, \ldots, x_n, 0) | \sum x_i^2 < R^2\}$ la bola abierta de radio R en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$. Considera la proyección π de $\mathbb{H}_R^n$ a $\mathbb{B}_R^n$ tal que $\pi(p)$, p y S son colineales.

(c) (1 punto) **Obtén** una fórmula para π y demuestra que es un difeomorfismo.

(d) (2 puntos) **Calcula** los coeficientes de la métrica en la carta coordenada dada por π.

Considera la transformación $\kappa : \mathbb{B}_R^n \to \mathbb{U}^n$ donde $\mathbb{U}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$ es el semiespacio superior, dada por:

$$\begin{aligned}\kappa(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, 0) :- &\left(\frac{2R^2}{x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2 + (x_n - R)^2}\right)(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \\ &+ \left(\frac{R\left(R^2 - \sum x_i^2\right)}{x_1^2 + \ldots x_{n-1}^2 + (x_n - R)^2}\right)(0, \ \ldots, \ 0, \ 1).\end{aligned}$$

(e) (1 punto) **Demuestra** que κ es un difeomorfismo.

(f) (2 puntos) **Calcula** los coeficientes de la métrica en la carta coordenada dada por $\kappa \circ \pi$.

El *grupo de Lorentz* $O(n, 1)$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas de tamaño $n + 1$ que son invertibles y tales que como automorfismo lineal de $\mathbb{R}^{n+1}$ preservan la métrica de Minkowski.

(g) (1 punto) Sea $M \in O(n, 1)$ un elemento del grupo de Lorentz.
Demuestra que la acción lineal de M en $\mathbb{R}^{n+1}$ preserva el hiperboloide dado por la ecuación

$$\tau^2 - \sum x_i^2 = R^2.$$

Si además no permuta las hojas del hiperboloide, entonces se restringe a un difeomorfismo $\varphi_M : \mathbb{H}_R^n \to \mathbb{H}_R^n$. Bajo la hipótesis anterior, y para cualquier $p \in \mathbb{H}_R^n$ **calcula** $T_p\varphi_M : T_p\mathbb{H}_R^n \to T_{\varphi_M(p)}\mathbb{H}_R^n$ y concluye que φ_M es una isometría de $(\mathbb{H}_R^n, g)$.

(h) (1 punto) **Demuestra** que para cualesquiera dos puntos p y $q \in \mathbb{H}_R^n$ y bases ortonormales

$$\beta_1 = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq T_p\mathbb{H}_R^n$$

$$\beta_2 = \{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq T_p\mathbb{H}_R^n$$

existe una matriz $M \in O(n, 1)$ tal que:

- $\varphi_M(p) = q$
- $T_p\varphi_M(u_i) = w_i$.