Geometría riemanniana I

Examen 3

Fecha de asignación	**7 de noviembre**
Fecha de entrega	**14 de noviembre**
Puntos requeridos	**10**
Puntos máximos posibles	**13**

Este examen aporta 10 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1 — 1 punto

Sea (M, g) una variedad riemanniana y sea ω una forma de volumen sobre M. Dado un punto $p \in M$ y una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio tangente T_pM decimos que β está orientada positivamente con respecto a ω si:

$$\omega_p(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

Sea γ una curva diferenciable sobre M y sea P_t^s el transporte paralelo a lo largo de γ. **Demuestra** que P_t^s preserva orientación.

Ejercicio 2 — 1 punto

Sea (M, g) una variedad riemanniana y $N \subseteq M$ una subvariedad. Sea $\tilde{g} = i^*(g)$ la métrica inducida sobre N bajo la inclusión.

Sea ∇ la conexión riemanniana de (M, g) y sea $\widetilde{\nabla}$ la conexión riemanniana de $(N, \tilde{g})$.

Dado un punto $p \in N$ sea $\pi_p : T_pM \to T_pN$ la proyección ortogonal sobre T_pN.

Define $\hat{\nabla}_X Y|_p := \pi_p(\nabla_X \tilde{Y})|_p$ donde X y Y son campos vectoriales sobre N definidos en una vecindad de p y donde $\tilde{Y}$ es cualquier extensión de Y a una vecindad de p en M. **Demuestra** que $\hat{\nabla}$ define una conexión sobre N y más aún $\hat{\nabla} = \widetilde{\nabla}$.

Ejercicio 3 — 1 punto

Sea $\gamma : (a, b) \to M$ una curva constante sobre una variedad M con conexión ∇. Sea $V : (a, b) \to T_pM$ un campo vectorial sobre γ. **Demuestra** que la derivada covariante de V a lo largo de γ coincide con la derivada usual de V como función $(a, b) \to T_pM \cong \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4 — 2 punto

Sea M una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$ y sea g la métrica riemanniana inducida sobre M a partir de la métrica euclideana de $\mathbb{R}^n$. Sea $\gamma : (a, b) \to M$ una curva diferenciable y sea $V : (a, b) \to TM$ un campo vectorial a lo largo de γ. V se puede pensar como una curva $V : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ usando la identificación usual de T_pM con un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

(a) (1 punto) **Demuestra** que un campo V es paralelo a lo largo de γ si y solo si $\frac{dV}{dt}$ es perpendicular a $T_{\gamma(t)}M$ donde $\frac{dV}{dt}$ es la derivada usual de funciones $(a, b) \to \mathbb{R}^n$.

(b) (1 punto) Si $M = \mathbb{S}^n$ vista como subvariedad de $\mathbb{R}^{n+1}$. **Demuestra** que los círculos máximos parametrizados por longitud de arco son geodésicas.

Ejercicio 5 4 punto

Sean M y N dos subvariedades de $\mathbb{R}^n$ con la métrica inducida. Sea $\gamma : (a,b) \to M \cap N$ una curva sobre ambas variedades y asume que $T_{\gamma(t)}M = T_{\gamma(t)}N$. Es decir, M y N son superficies tangentes a lo largo de γ.

(a) (1 punto) **Demuestra** que la derivada covariente a lo largo de γ con respecto a la conexión riemanniana de M coincide con la derivada covariente con respecto a la conexión riemanniana de N.

(b) (1 punto) Sea $M = \mathbb{S}^2$ la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$. Sea γ una parametrización por longitud de arco de un paralelo de $\mathbb{S}^2$. **Demuestra** que existe un cono que es tangente a $\mathbb{S}^2$ a lo largo de γ. (para que el cono sea superficie hay que considerarlo sin el vértice).

(c) (1 punto) Para cada punto de γ **demuestra** que existe una vecindad de dicho punto en el cono que es isométrica a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

(d) (1 punto) **Calcula** el transporte paralelo a lo largo de γ. Concluye que un paralelo **no** es geodésica a menos de que sea un círculo máximo.

Ejercicio 6 4 punto

Sean f y g funciones diferenciables. Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(u,v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v))$$

y asume que $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto en donde $f(v) \neq 0$ y además $f'(v)^2 + g'(v)^2 > 0$.

(a) (1 punto) **Demuestra** que φ es una inmersión que parametriza un abierto de la superficie de revolución generada por la curva $(f(v), g(v))$ al rotar a lo largo del eje z.

(b) (1 punto) **Demuestra** que la métrica inducida en las coordenadas u, v está dada por:

$$g_{11} = f^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (f')^2 + (g')^2$$

(c) (1 punto) **Demuestra** que las ecuaciones locales para una geodésica son:

$$\ddot{u} + \frac{2ff'}{f^2}\dot{u}\dot{v} = 0,$$

$$\ddot{v} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}\dot{u}^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}\dot{v}^2 = 0$$