Geometría riemanniana I

Examen 4

Fecha de asignación	**5 de diciembre**
Fecha de entrega	**16 de diciembre**
Puntos requeridos	**10**
Puntos máximos posibles	**18**

Este examen aporta 10 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Sea (M, g) una variedad riemanniana y ∇ la conexión riemanniana.

Definición. *El* ***endomorfismo de curvatura*** *es la función* $R : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^1(M)$ *definido como:*

$$R(X, Y, Z) := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Usualmente se escribe como $R(X, Y)Z$*.*

El ***tensor de curvatura de Riemann*** Rm *se define como:*

$$\mathrm{Rm}(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Ejercicio 1 — 5 puntos

(a) (1 punto) Demuestra que el endomorfismo de curvatura es un $\binom{1}{3}$-campo tensorial. Es decir, demuestra que es $C^\infty(M)$-lineal en las tres entradas.

(b) (1 punto) Demuestra que el tensor de curvatura de Riemann es un $\binom{0}{4}$-campo tensorial.

(c) (1 punto) Obtén una expresión en coordenadas locales para el tensor de Riemann en términos de los símbolos de Christoffel y de sus parciales.

(d) (1 punto) Demuestra que el tensor de Riemann satisface las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Rm}(W, X, Y, Z) = -\,\mathrm{Rm}(X, W, Y, Z)\\
&\mathrm{Rm}(W, X, Y, Z) = -\,\mathrm{Rm}(W, X, Z, Y)\\
&\mathrm{Rm}(W, X, Y, Z) = \mathrm{Rm}(Y, Z, W, X)\\
&\mathrm{Rm}(W, X, Y, Z) + \mathrm{Rm}(X, Y, W, Z) + \mathrm{Rm}(Y, W, X, Z) = 0
\end{aligned}$$

(e) (1 punto) Demuestra que el tensor de Riemann es un invariante bajo isometría local.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior.

Definición. *Decimos que un* $\binom{0}{4}$*-tensor* $\omega \in T_4^0(V)$ *sobre* V *es* ***tipo curvatura*** *si satisface las identidades del inciso d del ejercicio anterior.*

Si ω *es tipo curvatura, y* $\Pi \leq V$ *es un subespacio bidimensional, entonces definimos la* ***ω-curvatura seccional de*** Π *como:*

$$K_\omega(\Pi) := \frac{\omega(v, w, w, v)}{|v|^2|w|^2 - \langle v, w \rangle^2}$$

donde $\{v, w\}$ *es cualquier base de* Π*.*

Ejercicio 2 — 3 puntos

(a) (1 punto) Demuestra que la ω-curvatura seccional de Π efectivamente no depende de la base usada para definirla. En particular, si la base es ortonormal, se reduce a:

$$K_\omega(\Pi) = R(v, w, w, v).$$

(b) (1 punto) Demuestra que si ω_1 y ω_2 son dos tensores tipo curvatura tales que

$$K_{\omega_1}(\Pi) = K_{\omega_2}(\Pi)$$

para cualquier plano $\Pi \leq V$, entonces $\omega_1 = \omega_2$.

(c) (1 punto) Demuestra que si ω es un tensor tipo curvatura tal que $C = K_\omega(\Pi)$ no depende de Π, entonces se cumple:

$$\omega(X, Y, Z, W) = C\Big(\langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle X, Z\rangle\langle Y, W\rangle\Big)$$

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interior.

Definición. *Dado un tensor tipo curvatura ω sobre un espacio V, definimos:*

$$\mathrm{Ric}_\omega(v, w) := \sum \omega(e_i, v, w, e_i)$$

*donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de V. A Ric_ω le llamamos el **tensor de Ricci** asociado a ω.*
Así mismo, definimos

$$S_\omega := \sum \mathrm{Ric}_\omega(e_i, e_i)$$

*donde $\{e_i\}$ es una base ortonormal de V. A S_ω le llamamos la **curvatura escalar** asociada a ω.*

Ejercicio 3 — 3 puntos

(a) (1 punto) Demuestra que el tensor de Ricci no depende de la base ortonormal usada para definirlo.

(b) (1 punto) Demuestra que la curvatura escalar no depende de la base ortonormal usada para definirla.

(c) (1 punto) Demuestra que si la ω-curvatura seccional de ω es igual a una constante C, entonces se tienen las fórmulas:

$$\mathrm{Ric}_\omega(v, w) = (n-1)C\langle v, w\rangle$$
$$S_\omega = n(n-1)C$$

Ejercicio 4 — 3 puntos

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- el tensor Rm es idénticamente cero,
- para cualquier punto existe un marco local paralelo definido en una vecindad de dicho punto,
- para toda curva cerrada suficientemente pequeña, el transporte paralelo es la identidad,
- para todo punto existen vecindades isométricas a un abierto de $\mathbb{R}^n$ con la métrica plana.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Demuestra que el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n$ tiene curvatura seccional constante igual a -1.

Ejercicio 6 **2 puntos**

Demuestra que la esfera unitaria $\mathbb{S}^n$ tiene curvatura seccional constante igual a 1.