Profesor: Omar Daniel Álvarez Sánchez

Geometría riemanniana I — Ayudante: Román Ismael Contreras Morales — Fecha de aplicación

Tarea 1 — 15 de agosto de 2023

1. Tarea 1: cuestionario diagnóstico

Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes incisos, di si existe una función con las propiedades requeridas. Si es posible, intenta dar un ejemplo explícito de dicha función.

(a) Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que sea biyectiva, continua y con inversa continua (es decir, un homeomorfismo), diferenciable y que su inversa no sea diferenciable

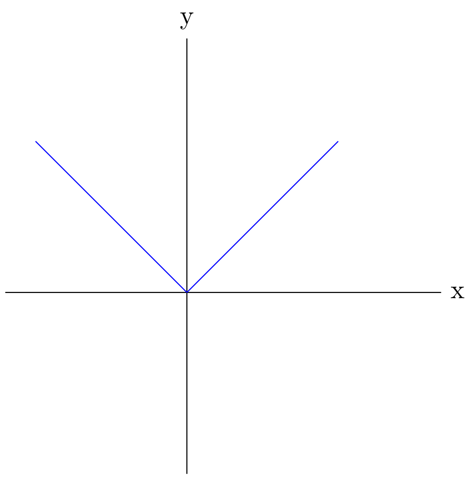
(b) Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable y con derivada no nula en todo punto de su dominio, tal que su imagen sea compacta.

(c) Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ diferenciable y con derivada no nula en todo punto de su dominio, tal que su imagen sea compacta. (Igual que en el caso anterior, pero el codominio es $\mathbb{R}^2$)

(d) Igual que el inciso anterior, pero que la función sea inyectiva

Ejercicio 2

Sea $X := \{(x, |x|)|x \in \mathbb{R})\}$ la gráfica de la función valor abosoluto.



(a) Puede existir una función diferenciable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ cuya imagen sea el conjunto X.

(b) Igual que el inciso anterior, pero además que la derivada de la función no se anule en ningún punto.

Ejercicio 3

Para cada uno de los siguientes subconjuntos X de $\mathbb{R}^2$ di si puede existir una función diferenciable $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que la preimagen del cero de dicha función sea el conjunto dado. Es decir $f^{-1}(0) = X$. ¿Puede ser que la función tenga derivada no nula en todo punto del dominio?

(a) $X = \{(x, y)|x^2 = y^2\}$

(b) $X = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $X = \{(x, y)|y = 0\}$

Ejercicio 4

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Además, sea $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno para V. En cada una de las siguientes afirmaciones escribe **V** si la afirmación es verdadera, o **F** si es falsa.

(a) ____ Si T es inyectiva, entonces es suprayectiva.

(b) ____ Si T es suprayectiva, entonces es inyectiva.

(c) ____ Si T es biyectiva, entonces su inversa es lineal.

(d) ____ Existe una base β para V en la que la matriz $[T]_\beta^\beta$ es diagonal.

(e) ____ Existen bases β y γ para V en las que la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es diagonal.

(f) ____ Existen bases β y γ para V en las que la matriz $[T]_\beta^\gamma$ es diagonal y únicamente tiene ceros o unos en la diagonal.

(g) ____ El espacio vectorial V es isomorfo a algún $\mathbb{R}^n$.

(h) ____ Existe un isomorfismo lineal de V a $\mathbb{R}^n$ que además «manda» el producto interno en el producto interno estándar de $\mathbb{R}^n$.

(i) ____ Existe una base $\beta = \{e_1, \ldots, e_n\}$ para V tal que:

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \; 1 \text{ si } i = j$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = 1 \text{ si } i = j$$

(j) ____ Existen transformaciones lineales biyectivas $\phi : \mathbb{R}^n \to V$ y $\psi : V \to \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

y la transformación η está dada por:

$$\eta(x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$$