Geometría riemanniana I

Tarea 10

Fecha de asignación	**15 de noviembre**
Fecha de entrega	**22 de noviembre**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**7**

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1 — 1 punto

Sea (M, g) una variedad riemanniana y ∇ la conexión riemanniana. Sea $p \in M$ un punto arbitrario y $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ una carta coordenada normal centrada en p. Demuestra que en esta carta los símbolos de Christoffel y las parciales de los coeficientes de la métrica se anulan en p:

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

$$\partial_k g_{ij}(p) = 0.$$

Ejercicio 2 — 6 punto

Sea M una variedad y sea $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ un flujo sobre M, es decir, ϕ es una función diferenciable y se cumple:

- $\phi(0, x) = x$
- $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$.

Por ϕ_t denotamos a la función $\phi_t : M \to M$ dada por $\phi_t(x) = \phi(t, x)$.

(a) (1 punto) Demuestra que ϕ_t es un difeomorfismo para toda t y además se cumple $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$.

(b) (1 punto) Demuestra que existe un único campo vectorial $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$ tal que las curvas $\phi(t, p_0)$ con p_0 fijo son curvas integrales de X:

$$X(\phi(s, p_0)) = \frac{d}{dt}\phi_t(p_0)\Big|_s$$

a dicho campo se le llama el *generador infinitesimal del flujo*.

(c) (1 punto) Demuestra que si $p \in M$ es un punto tal que $X(p) \neq 0$, entonces existe un sistema de coordenadas en una vecindad de p tal que $X = \partial_1$.

(d) (1 punto) Dada $f \in C^\infty(M)$ definimos la *derivada de Lie* $\mathcal{L}_X f$ como:

$$\mathcal{L}_X f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(f(\phi_t(p)) - f(p)\Big).$$

Demuestra que $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

(e) (1 punto) Dado $Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ definimos la *derivada de Lie* $\mathcal{L}_X Y$ como:

$$\mathcal{L}_X Y(p) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big((\phi_{-t})_*(Y(\phi_t(p))) - Y(p)\Big).$$

Demuestra que $\mathcal{L}_X f = [X, Y]$.

(f) (1 punto) Sea ω un $\binom{0}{2}$-campo tensorial. Definimos la derivada de Lie $\mathcal{L}_X\omega$ como el $\binom{0}{2}$-campo tensorial dado por:

$$\mathcal{L}_X\omega(p) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((\phi_t)^*(\omega(\phi_t(p))) - \omega(p)\Big).$$

Demuestra que si Y, Z son dos campos vectoriales sobre M, entonces se cumple:

$$\mathcal{L}_X\left(\omega(Y,Z)\right) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y,Z) + \omega(\mathcal{L}_X Y, Z) + \omega(Y, \mathcal{L}_X Z).$$