Geometría riemanniana I

Tarea 11

Fecha de asignación	**22 de noviembre**
Fecha de entrega	**29 de noviembre**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**7**

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1 — 7 puntos

Sea $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} | z \neq 0\}$ el plano complejo sin el cero. Este conjunto se puede identificar naturalmente con un abierto de $\mathbb{R}^2$, por lo que es una variedad diferenciable.

Así mismo, si $z \in \mathbb{C}^*$ identificaremos $T_z\mathbb{C}^*$ con $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Si $z \in \mathbb{C}^*$ es cualquier complejo no nulo, definimos $\mu_z : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ como $\mu_z(w) = zw$.

(a) (1 punto) **Demuestra** que la función $\mu : \mathbb{C}^* \to \mathrm{Diff}(\mathbb{C}^*)$ dada por $\mu(z) := \mu_z$ es un homomorfismo del grupo multiplicativo de los complejos no nulos al grupo de difeomorfismos de $\mathbb{C}^*$.

(b) (1 punto) **Demuestra** que existe una única métrica riemanniana g_{bi} que cumple las siguientes dos propiedades:

- para toda $z \in \mathbb{C}^*$, el difeomorfismo μ_z es isometría,
- $g_{\mathrm{bi}}(1) = dx \otimes dx + dy \otimes dy$.

(c) (1 punto) **Calcula** los coeficientes de la métrica g_{bi} con respecto a las coordenadas cartesianas usuales.

Decimos que un campo vectorial $X \in \mathcal{T}^1_0(\mathbb{C}^*)$ es *invariante* si para todo $z \in \mathbb{C}^*$ satisface $(\mu_z)_*(X) = X$. Denotamos el conjunto de campos vectoriales invariantes por $\mathfrak{g}$.

(d) (1 punto) **Demuestra** que la función $\mathrm{ev}_1 : \mathfrak{g} \to T_1\mathbb{C}^*$ que a cada campo invariante le asigna su valor en 1 es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(e) (1 punto) Dado un vector $v \in T_1\mathbb{C}^*$, sea V el campo invariante asociado tal que $V(1) = v$. **Calcula** el flujo del campo V.

Sea ∇ la conexión riemanniana asociada a g_{bi}.

(f) (1 punto) **Demuestra** que si X y Y son campos invariantes, entonces se cumple $\nabla_X Y = 0$.

(g) (1 punto) **Demuestra** que el mapeo exponencial $\exp_1 : T_1\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ está definido en todo $T_1\mathbb{C}^*$ y encuentra una fórmula explícita para $\exp_1(v)$.