Geometría riemanniana I

Tarea 12

Fecha de asignación	**29 de noviembre**
Fecha de entrega	**5 de diciembre**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**7**

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Definición. *Decimos que una variedad riemanniana* (M, g) *es* homogénea *si dados cualesquiera dos puntos* $p, q \in M$ *existe una isometría* $f : M \to M$ *tal que* $f(p) = q$.

Decimos que es isotrópica *si para cualquier punto* $p \in M$ *y cualesquiera dos vectores* $v, w \in T_pM$ *existe una isometría* $f : M \to M$ *tal que* $f(p) = p$ *y además* $T_pf(v) = w$.

Teorema (Hopf-Rinow). *Dada una variedad riemanniana conexa* (M, g) *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *existe un punto* $p \in M$ *para el que la aplicación exponencial* $\exp_p$ *está definida en todo* T_pM
- *para cualquier punto* $p \in M$ *la aplicación exponencial* $\exp_p$ *está definida en todo* T_pM
- *para cualesquiera dos puntos* $p, q \in M$ *existe al menos un segmento geodésico minimizante que conecta dichos puntos*
- *cualquier geodésica se puede extender para todo tiempo*
- M *es completa como espacio métrico con la función distancia inducida por la función de longitud.*

Decimos que M *es* geodésicamente completa *si cumple cualquiera de las condiciones anteriores.*

Ejercicio 1 — 1 punto

Demuestra que toda variedad riemanniana homogénea es geodésicamente completa.

Ejercicio 2 — 1 punto

Demuestra que toda variedad isotrópica y geodésicamente completa es homogénea.

Definición. *Dado un campo* X *sobre* M, *decimos que es* paralelo *si para cualquier otro campo* Y *se satisface* $\nabla_Y X = 0$.

Ejercicio 3 — 1 punto

Demuestra que si X es un campo paralelo, entonces toda curva integral es una geodésica.

Ejercicio 4 — 2 punto

Considera las coordenadas esféricas definidas como:

$$\psi(\vartheta, \varphi) = (\sin\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\varphi).$$

La función ψ parametriza el abierto $\mathbb{S}^2 \setminus \{(x, y, z) | x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$. Considera el campo $V = \partial\varphi$ en dichas coordenadas.

(a) (1 punto) Calcula $\nabla_{\partial\vartheta} V$ y $\nabla_{\partial\varphi} V$ y concluye que V es paralelo a lo largo de los meridianos y del ecuador.

(b) (1 punto) Sea $p = (0, \pi/2)$. Demuestra que $V(p)$ no se puede extender a un campo paralelo en una vecindad de p.

Ejercicio 5 2 punto

Sean f y g funciones diferenciables. Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v))$$

y asume que $U \subseteq \mathbb{R}^2$ es un abierto en donde $f(v) \neq 0$ y además $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$.

Recuerda que en un ejercicio anterior se demostró que esto parametriza un abierto de una superficie de revolución.

(a) (1 punto) Demuestra que los meridianos, es decir, las curvas $\varphi(u_0, v)$ con u_0 constante, son geodésicas.

(b) (1 punto) Da condiciones necesarias y suficientes para que los paralelos, es decir, las curvas $\varphi(u, v_0)$ con v_0 constante, sean geodésicas.