Tarea 2: métrica hiperbólica en el semiplano superior

Fecha de asignación	**21 de agosto**
Fecha de entrega	**24 de agosto**
Puntos requeridos	**3**
Puntos máximos posibles	**5**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 3 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Considera la métrica conforme en el semiplano superior

$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

tal que en cada punto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{H}$ induce el producto interno

$$\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{y^2} \langle v, w \rangle$$

Al semiplano junto con dicha métrica, se le llama *el plano hiperbólico*. Diremos que un difeomorfismo[1] $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es una *isometría* de dicha métrica conforme si y solo si, para cualesquiera $p \in \mathbb{H}$ y vectores v, w se cumple:

$$\langle v, w \rangle_p = \langle D_p\varphi v, D_p\varphi w \rangle_{\varphi(p)}$$

Es decir, la diferencial $D_p\varphi$ es una isometría lineal entre el espacio con producto interno dado por $\langle \ , \ \rangle_p$ y el espacio con producto interno dado por $\langle \ , \ \rangle_{\varphi(p)}$. Finalmente, recuerda que la longitud de cualquier curva diferenciable

$$\gamma : (a, b) \to \mathbb{H}$$

con respecto a la métrica conforme, está dada por:

$$\ell(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{\gamma(t)}}\, dt = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)} dt.$$

Ejercicio 1

Demuestra que las siguientes transformaciones son isometrias del plano hiperbólico.

(a)
$$T_r(x, y) = (x + r, y)$$

(b)
$$H_\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \text{ con } \lambda > 0$$

(c)
$$R(x, y) = (-x, y)$$

Ejercicio 2

Demuestra que la siguiente transformación es una isometría del plano hiperbólico.

$$I(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-x, y)$$

Ejercicio 3

Sean a y b tales que $0 < a < b$. Considera el segmento vertical que conecta los puntos $(0, a)$ y $(0, b)$. Sea

γ cualquier parametrización diferenciable de dicho segmento. Demuestra que la longitud de γ está dada por:

$$\ell(\gamma) = \ln(b/a)$$

Ejercicio 4

Demuestra que cualquier curva diferenciable $\gamma : [s,t] \to \mathbb{H}$ tal que $\gamma(s) = (0,a)$ y $\gamma(t) = (0,b)$ tiene longitud mayor o igual a $\ln(b/a)$

Ejercicio 5

Dados a, b, c, d tales que $ad - bc \neq 0$, demuestra que la transformación (en notación compleja) dada por:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una isometría del plano hiperbólico.