Tarea 3: Álgebra multilineal

Fecha de asignación	**28 de agosto**
Fecha de entrega	**31 de agosto**
Puntos requeridos	**3**
Puntos máximos posibles	**4**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 3 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

En lo que sigue, sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, con base

$$\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

y sea

$$\beta^* = \{\alpha^1 \ldots, \alpha^n\}$$

la base dual de V^*, dual a β.

Ejercicio 1

(a) Demuestra que $T^1_0(V)$ es naturalmente isomorfo a V. Es decir, el isomorfismo no depende de la elección de una base.

(b) Demuestra que los elementos de la forma $v \otimes w$ con v y w elementos de V generan a T^2_0.

(c) Demuestra que $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j=1}^n$ es una base de $T^2_0(V)$. ¿cúal es la dimensión de dicho espacio?

Ejercicio 2

Demuestra la propiedad universal del producto tensorial para $T^2_0(V)$. Es decir, demuestra que existe una función bilineal $\mu : V \times V \to T^2_0(V)$ que cumple la siguiente propiedad:

Para cualquier espacio vectorial P y función bilineal $\tilde{\mu} : V \times V \to P$ existe una única transformación lineal $\phi : T^2_0(V) \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} T^2_0(V) \arrow[r, "\phi"] & P \\ V \times V \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\tilde{\mu}"'] & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 3

Demuestra que existe un isomorfismo natural entre $T^2_0(V)^*$ y $T^0_2(V)$. Es decir, el isomorfismo se puede definir sin utilizar bases. Sugerencia: utiliza la propiedad universal.

Ejercicio 4

Sea $\phi : T^1_1(V) \to L(V, V)$ la única transformación lineal que convierte $\binom{1}{1}$-tensores en endomorfismos lineales de V y que cumple:

$$\phi(v \otimes \alpha) = [w \mapsto \alpha(w)v]$$

(a) Demuestra que esta aplicación está bien definida y es un isomorfismo.

(b) Considera la única función lineal $c : T^1_1(V) \to \mathbb{R}$ que cumple $c(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$. Demuestra que está bien definida.

(c) ¿cúal es la única función lineal t que cumple que el siguiente diagrama es conmutativo?

$$\begin{tikzcd} T_1^1(V) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{R} \\ L(V,V) \arrow[ur, "t"] & \end{tikzcd}$$