Tarea 4: Subvariedades y sumersiones

Fecha de asignación	**11 de septiembre**
Fecha de entrega	**14 de septiembre**
Puntos requeridos	**4**
Puntos máximos posibles	**5**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 4 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario. Demuestra que las siguientes son equivalentes:

- X es una subvariedad de dimensión k
- para todo punto $p \in X$ existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que:
  - $p \in \mathcal{U}$
  - f es una sumersión
  - $X \cap \mathcal{U} = f^{-1}(0)$

Ejercicio 2

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ una función diferenciable con $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ dos abiertos. Sea $p \in \mathcal{U}$. Demuestra que si $D_p f$ es inyectiva entonces existe un difeomorfismo $\phi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ donde $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ es una vecindad de $f(p)$ y además en una vecindad de p se cumple que:

$$\phi \circ f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0).$$

Ejercicio 3

Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensiones n y m respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal de rango k. Demuestra que existen isomorfismos $\varphi : \mathbb{R}^n \to V$ y $\psi : W \to \mathbb{R}^m$ tales que

$$\psi \circ T \circ \varphi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Demuestra que esta última transformación es igual a $i \circ \pi$ donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es la proyección en las primeras k coordenadas e $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ es la inclusión.

Ejercicio 4

Sea $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ una función diferenciable con $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ dos abiertos. Considera la función $\mathrm{rk}(f) : \mathcal{U} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(f) : \mathcal{U} &\to \mathbb{Z} \\ p &\mapsto \mathrm{rk}(D_p f) \end{aligned}$$

Es decir, $\mathrm{rk}(f)$ es la función que a cada punto le asigna el rango de la diferencial de f en dicho punto. Demuestra que esta función es localmente no decreciente.

Ejercicio 5

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto arbitrario. Demuestra que si se cumple que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ donde $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que la diferencial de f es inyectiva en todo punto y además f es un homeomorfismo entre $\mathcal{V}$ y $X \cap \mathcal{U}$ entonces X es una k subvariedad.