

Tarea 5: Espacio tangente y aplicación tangente

Fecha de asignación	18 de septiembre
Fecha de entrega	21 de septiembre
Puntos requeridos	3
Puntos máximos posibles	4

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 4 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1

Dadas tres variedades X , Y y Z , dos transformaciones diferenciables $\varphi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow Z$, y un punto $p \in X$, **demuestra**:

- $T_p^A(\psi \circ \phi) = T_{\varphi(p)}^A(\psi) \circ T_p^A(\varphi)$
- $T_p^G(\psi \circ \phi) = T_{\varphi(p)}^G(\psi) \circ T_p^G(\varphi)$
- $T_p^A(\text{Id}_X) = \text{Id}_{T_p^A X}$
- $T_p^G(\text{Id}_X) = \text{Id}_{T_p^G X}$
- La función $T_p^A \varphi$ es lineal.

Ejercicio 2

En clase definimos una función $\text{der}_p : T_p^G X \rightarrow T_p^A X$. **Demuestra** que el siguiente cuadro es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p^G X & \xrightarrow{\text{der}_p} & T_p^A X \\
 \downarrow T_p^G \varphi & & \downarrow T_p^A \varphi \\
 T_{\varphi(p)}^G Y & \xrightarrow{\text{der}_{\varphi(p)}} & T_{\varphi(p)}^A Y
 \end{array}$$

Demuestra que la función es una biyección que preserva la estructura aditiva y la multiplicación por escalar. Concluye que $T_p^G X$ es un espacio vectorial y que la función de hecho es un isomorfismo de espacios vectoriales.

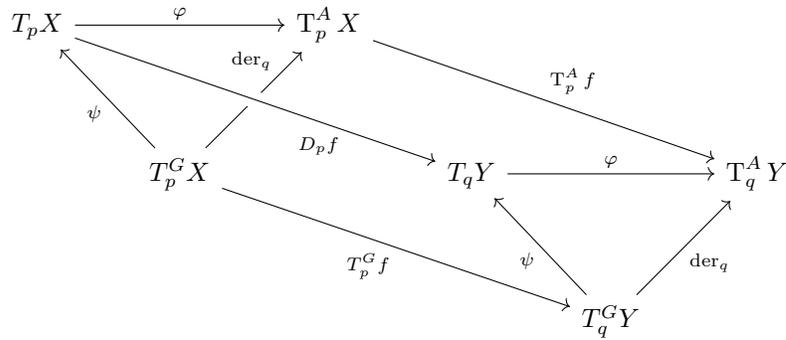
Ejercicio 3

En el caso de que X sea una subvariedad de \mathbb{R}^n ya habíamos definido con anterioridad una noción de espacio tangente como subespacio de \mathbb{R}^n . Junto con las definiciones *intrínsecas* de espacio tangente geométrico y de espacio tangente algebraico tenemos tres definiciones para el espacio tangente.

Sean X y Y subvariedades de espacios euclidianos. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función diferenciable y sean $p \in X$ y $q = f(p)$ puntos en X y Y respectivamente.

Denotemos por $T_p X$ el espacio tangente de X en p definido como subespacio vectorial del espacio ambiente.

Define isomorfismos lineales que completen el siguiente diagrama de tal forma que sea conmutativo.



Ejercicio 4

Sea $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. **Demuestra** que no existe ninguna función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tal que $d(f) = \omega$, pero localmente sí existe dicha función. Es decir, para todo punto $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y una función $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(f) = \omega|_{\mathcal{U}}$.