Tarea 5: Espacio tangente y aplicación tangente

Fecha de asignación	**18 de septiembre**
Fecha de entrega	**21 de septiembre**
Puntos requeridos	**3**
Puntos máximos posibles	**4**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 4 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1

Dadas tres variedades X, Y y Z, dos transformaciones diferenciables $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$, y un punto $p \in X$, **demuestra**:

- $T_p^A(\psi \circ \phi) = T_{\varphi(p)}^A(\psi) \circ T_p^A(\varphi)$
- $T_p^G(\psi \circ \phi) = T_{\varphi(p)}^G(\psi) \circ T_p^G(\varphi)$
- $T_p^A(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{T_p^A X}$
- $T_p^G(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{T_p^G X}$
- La función $T_p^A \varphi$ es lineal.

Ejercicio 2

En clase definimos una función $\mathrm{der}_p : T_p^G X \to T_p^A X$. **Demuestra** que el siguiente cuadro es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
T_p^G X \arrow[r, "\mathrm{der}_p"] \arrow[d, "T_p^G \varphi"'] & \mathrm{T}_p^A X \arrow[d, "T_p^A \varphi"] \\
T_{\varphi(p)}^G Y \arrow[r, "\mathrm{der}_{\varphi(p)}"'] & \mathrm{T}_{\varphi(p)}^A Y
\end{tikzcd}$$

Demuestra que la función es una biyección que preserva la estructura aditiva y la multiplicación por escalar. Concluye que $T_p^G X$ es un espacio vectorial y que la función de hecho es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejercicio 3

En el caso de que X sea una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ ya habíamos definido con anterioridad una noción de espacio tangente como subespacio de $\mathbb{R}^n$. Junto con las definiciones *intrínsecas* de espacio tangente geométrico y de espacio tangente algebraico tenemos tres definiciones para el espacio tangente.

Sean X y Y subvariedades de espacios euclideanos. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable y sean $p \in X$ y $q = f(p)$ puntos en X y Y respectivamente.

Denotemos por $T_p X$ el espacio tangente de X en p definido como subespacio vectorial del espacio ambiente.

Define isomorfismos lineales que completen el siguiente diagrama de tal forma que sea sea conmutativo.

$$
\begin{tikzcd}
T_pX \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[drrr, "D_p f"'] & & \mathrm{T}^A_p X \arrow[drrr, "\mathrm{T}^A_p f"] & & & \\
& T^G_p X \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\mathrm{der}_q"] \arrow[drrr, "T^G_p f"'] & & T_qY \arrow[rr, "\varphi"] & & \mathrm{T}^A_q Y \\
& & & & T^G_q Y \arrow[ul, "\psi"] \arrow[ur, "\mathrm{der}_q"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejercicio 4

Sea $\omega = \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. **Demuestra** que no existe ninguna función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tal que $d(f) = \omega$, pero localmente sí existe dicha función. Es decir, para todo punto $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tal que $d(f) = \omega|_{\mathcal{U}}$.