Tarea 6: Campos tensoriales en variedades

Fecha de asignación	**25 de septiembre**
Fecha de entrega	**28 de septiembre**
Puntos requeridos	**3**
Puntos máximos posibles	**4**

Cada ejercicio vale un punto. Esta tarea aporta 3 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Ejercicio 1

Sea X una variedad de dimensión n. Sean $f^1, \ldots, f^n$ funciones diferenciables definidas en un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$. Es decir:

$$f^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}.$$

Sea $p \in \mathcal{U}$ un punto y asume que $\left\{df^i|_p\right\}_{i=1}^n$ es una base de T_pX^*. **Demuestra** que existe una vecindad de p en la que las funciones f^i son las coordenadas de una carta, es decir la función

$$\begin{aligned}\varphi : \mathcal{V} &\to \mathbb{R}^n \\ q &\mapsto \left(f^1(q), f^2(q), \ldots, f^n(q)\right)\end{aligned}$$

es una carta. Si $v \in T_pX$ **demuestra** que

$$T_p\varphi(v) = \left(df^1|_p(v), \ldots, df^n|_p(v)\right).$$

Ejercicio 2

Sean X y Y dos variedades de dimensiones m y n respectivamente. Sea $X \times Y$ la *variedad producto*, misma que se definió en una tarea pasada. Sean $p \in X$ y $q \in Y$ dos puntos arbitrarios.

Sean $\pi_X : X \times Y \to X$ y $\pi_Y : X \times Y \to X$ las proyecciones en el primer y segundo factor respectivamente.

Sean $i_q : X \to X \times Y$ dada por $i_q(x) = (x, q)$ y $i_p : Y \to X \times Y$ dada por $i_p(y) = (p, y)$.

Demuestra que las cuatro funciones anteriores son diferenciables. **Demuestra** que T_pX se puede identificar con la imagen de T_pi_q y con el núcleo de $T_{(p,q)}\pi_Y$. Análogamente T_qY se puede identificar con la imagen de T_qi_p y con el núcleo de $T_{(p,q)}\pi_X$.

Demuestra que con las identificaciones anteriores, se tiene

$$T_{(p,q)}X \times Y = T_pX \oplus T_qY.$$

Ejercicio 3

Sea M una variedad y $\mathcal{U} \subseteq M$ un abierto. Una *derivación* sobre $C^\infty(\mathcal{U})$ es una función $\mathbb{R}$-lineal $\partial : C^\infty(\mathcal{U}) \to C^\infty(\mathcal{U})$ que satisface:

$$\partial(fg) = f\partial(g) + \partial(f)g.$$

Demuestra que hay un isomorfismo entre el espacio de derivaciones sobre $\mathcal{U}$ y el espacio de campos vectoriales sobre $\mathcal{U}$.

Sugerencia: demuestra que el valor de $\partial(f)(p)$ depende únicamente de los valores de f en una vecindad arbitraria de p.

Para este ejercicio puedes asumir lo siguiente: dado un punto $p \in M$ y cualquier vecindad abierta $\mathcal{U}$ de p, existe otra vecindad abierta $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ que cumple:

- $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo x
- $f(x) = 0$ para todo $x \in M \setminus \mathcal{U}$
- $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathcal{V}$.

Ejercicio 4

Sea M una variedad y $\mathcal{U} \subseteq M$ un abierto. Sean X y Y dos campos vectoriales sobre $\mathcal{U}$.

Considera la asignación ∂ definida como sigue:

$$\begin{aligned} \partial : C^{\infty}(\mathcal{U}) &\longrightarrow C^{\infty}(\mathcal{U}) \\ f &\mapsto X(Y(f)) - Y(X(f)) \end{aligned}$$

Demuestra que la asignación anterior es una derivación sobre $\mathcal{U}$, por lo que define un campo vectorial. Denotaremos dicho campo por $[X, Y]$. **Calcula** la expresión en coordenadas locales de $[X, Y]$.

A $[X, Y]$ se le llama el *corchete de Lie* de los campos X y Y.