Geometría riemanniana I

Tarea 7

Fecha de asignación	**16 de octubre**
Fecha de entrega	**23 de octubre**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**6**

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Sea M una variedad y ∇ una conexión.

Ejercicio 1 — 1 punto

Sean X y Y dos campos vectoriales y $p \in M$ un punto arbitrario.

Demuestra que el vector $(\nabla_X Y)|_p$ solo depende de $X(p)$ y del valor de Y en una vecindad arbitraria de p.

Ejercicio 2 — 1 punto

Considera la función $\mathfrak{L} : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^1(M)$ dada por:

$$\mathfrak{L}_X Y \coloneqq [X, Y].$$

A esta función se le llama la *derivada de Lie*. **Demuestra** que la derivada de Lie no es una conexión.

Ejercicio 3 — 1 punto

Demuestra que existen campos vectoriales X y Y sobre $\mathbb{R}^2$ tales que $X = \partial_1 = Y$ sobre el eje x, pero tales que las derivadas de Lie $\mathfrak{L}_X \partial_2$ y $\mathfrak{L}_Y \partial_2$ no son iguales.

Ejercicio 4 — 1 punto

Sean $\{E_i\}_{i=1}^n$ y $\{F_i\}_{i=1}^n$ dos marcos sobre un abierto $\mathcal{U}$. Es decir, cada E_i y F_i es un campo vectorial sobre $\mathcal{U}$ y además, en cada punto de $\mathcal{U}$ los campos forman una base para el espacio tangente.

Sean A_i^j las funciones definidas por:

$$E_i = \sum A_i^j F_j$$

y sean Γ_{ij}^k y $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ los símbolos de Christoffel de la conexión ∇ con respecto a dichos marcos.

Demuestra que se tiene el siguiente sistema de identidades:

$$\Gamma_{ij}^k = (A^{-1})_p^k A_i^q A_j^r \tilde{\Gamma}_{qr}^p + (A^{-1})_p^k A_i^q F_q(A_j^p).$$

Ejercicio 5 — 1 punto

Sea $\tau : \mathcal{T}_0^1(M) \times \mathcal{T}_0^1(M) \to \mathcal{T}_0^1(M)$la función dada por:

$$\tau(X, Y) \coloneqq \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Demuestra que τ es un $\binom{1}{2}$-campo tensorial. A este campo se le llama la *torsión* de la conexión.

Ejercicio 6 1 punto

Exhibe un ejemplo de una curva γ que sea una inmersión inyectiva y de un campo vectorial sobre γ que no sea extendible.