Geometría riemanniana I

Tarea 8

Fecha de asignación	**23 de octubre**
Fecha de entrega	**30 de octubre**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**7**

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

Sea M una variedad y ∇ una conexión.

Ejercicio 1 — 1 punto

Demuestra que la derivada covariante se puede recuperar a partir del transporte paralelo. Es decir, **demuestra** que si $\gamma : (a, b) \to M$ es una curva, $X \in \mathcal{T}_0^1(\gamma)$ es un campo a lo largo de γ, entonces se cumple:

$$D_t X(t_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(P^t_{t_0+t} X(t_0 + t) - X(t_0) \right) .$$

Sugerencia: Expresa a X en términos de una base de campos paralelos.

Ejercicio 2 — 1 punto

Demuestra que la conexión se puede recuperar a partir de la derivada covariante.

Más específicamente, **demuestra** que si X y Y son campos vectoriales sobre M, $p \in M$ es un punto arbitrario, y $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es cualquier curva que representa el vector $X(p)$, entonces se cumple:

$$\nabla_X Y(p) = D_t Y_\gamma(0)$$

donde D_t es la derivada covariante a lo largo de γ y Y_γ es el campo sobre γ que se obtiene al precomponer Y con γ.

En particular, $\nabla_X Y(p)$ solo depende de los valores de Y a lo largo de una curva con vector velocidad dado por $X(p)$.

Ejercicio 3 — 5 punto

Considera $M = \mathbb{R}^3$ con la estructura diferenciable natural y sea g_E la métrica euclideana estándar. Definimos una conexión ∇ mediante sus símbolos de Christoffel como sigue:

$$\Gamma^i_{jk} = \omega \varepsilon_{ijk}$$

donde $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable y el símbolo ε_{ijk} está definido por:

$$\varepsilon_{ijk} \coloneqq \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación } \textbf{par} \text{ de}(1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación } \textbf{impar} \text{ de}(1, 2, 3) \\ 0, & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

(a) (1 punto) **Demuestra** que ∇ es compatible con g_E.

(b) (1 punto) **Demuestra** que las geodésicas de ∇ son las rectas.

(c) (1 punto) **Demuestra** que la torsión de ∇ es diferente a cero en todos los puntos donde la función ω no se anule. En particular, ∇ no es la conexión de Levi-Civita a menos de que ω sea idénticamente cero.

(d) (1 punto) **Demuestra** que si X es un campo paralelo a lo largo de una recta γ, entonces satisface la ecuación:
$$\dot{X}(t) = -\omega(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \times X(t)$$
por lo que corresponde a rotar el vector a lo largo de la recta γ con velocidad angular dada por $-\omega(\gamma)\dot{\gamma}$.

(e) (1 punto) **Calcula** explícitamente el transporte paralelo P_0^t para el caso de $\omega = 1$ y $\gamma(t) = (t, 0, 0)$.