

# Geometría riemanniana I

## Tarea 9

Fecha de asignación	30 de octubre
Fecha de entrega	6 de noviembre
Puntos requeridos	5
Puntos máximos posibles	7

Esta tarea aporta 5 puntos a la calificación global. Si entregas más ejercicios correctos, estos cuentan como puntos extra.

### Ejercicio 1

4 puntos

Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  dos variedades riemannianas. Sea  $\varphi : M \rightarrow N$  una isometría.

- (a) (1 punto) **Demuestra** que  $\varphi$  lleva la conexión riemanniana  $\nabla$  de  $g$  en la conexión riemanniana  $\tilde{\nabla}$  de  $h$ . Es decir para cualesquiera dos campos  $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$  se cumple:

$$\varphi_*(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{\varphi_* X}(\varphi_* Y)$$

- (b) (1 punto) **Demuestra** que si  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  es una curva y  $V \in \mathcal{T}_0^1(\gamma)$  es un campo a lo largo de  $\gamma$ , entonces se cumple:

$$\varphi_*(D_t V) = \tilde{D}_t(\varphi_* V)$$

donde  $\tilde{D}_t$  es la derivada covariante sobre  $\varphi \circ \gamma$ .

- (c) (1 punto) **Demuestra** que  $T_p \varphi$  conmuta con el transporte paralelo, es decir, si  $\gamma$  es una curva,  $P_s^t$  es el transporte paralelo sobre  $\gamma$ ,  $\tilde{P}_s^t$  es el transporte paralelo sobre  $\varphi \circ \gamma$ , entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} T_{\gamma(s)}M & \xrightarrow{T_{\gamma(s)}\varphi} & T_{\varphi \circ \gamma(s)}N \\ P_s^t \downarrow & & \downarrow \tilde{P}_s^t \\ T_{\gamma(t)}M & \xrightarrow{T_{\gamma(t)}\varphi} & T_{\varphi \circ \gamma(t)}N \end{array}$$

- (d) (1 punto) **Demuestra** que  $\varphi$  lleva geodésicas en geodésicas, es decir: si  $\gamma$  es una geodésica de  $\nabla$  entonces  $\varphi \circ \gamma$  es una geodésica de  $\tilde{\nabla}$ .

### Ejercicio 2

1 punto

Demuestra que la conexión euclidea es simétrica y compatible con la métrica euclidea.

### Ejercicio 3

2 puntos

Calcula los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana del plano hiperbólico en el modelo del semiplano de Poincaré.