Topología diferencial I

Tarea 4

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**26 de agosto de 2024**
Fecha de entrega	**2 de septiembre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**75**

Ejercicio 1 — 4 puntos

Sea

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 = x^2 + y^2 \text{ y además } z \geq 0\}.$$

Demuestra o exhibe un contraejemplo: no existen difeomorfismos entre $\mathbb{R}^2$ y X.

Ejercicio 2 — 4 puntos

Considera la relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dada por $v \sim w$ si y solo si v y w generan el mismo subespacio. Demuestra que $\mathbb{R}^3/\sim$, que también denotaremos $\mathbb{RP}^2$, con la topología cociente es una variedad topológica.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ si y solo si la correspondiente función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual.

Ejercicio 4 — 3 puntos

Demuestra que si consideramos a todos los conjuntos que son subconjunto de algún $\mathbb{R}^n$ como objetos y a las funciones diferenciables entre ellos como morfismos, se obtiene una categoría.

Ejercicio 5 — 3 puntos

Demuestra que si X es un subespacio afin de $\mathbb{R}^n$ entonces es difeomorfo a algún $\mathbb{R}^k$. Más aún, se puede obtener un difeomorfismo como la composición de una transformación lineal inyectiva seguida de una traslación.

Ejercicio 6 — 3 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciales, entonces existe una variedad diferenciable Z tal que se puede descomponer como unión ajena de dos subespacios tal que uno es difeomorfo a X y el otro a Y.

Ejercicio 7 — 3 puntos

Demuestra que la esfera $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable que no es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8 — 3 puntos

Considera $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, que es una 1-variedad diferenciable. Describe explícitamente (mediante una base) al espacio tangente

$$T_x\mathbb{S}^1$$

para cada $x \in \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 9 — 5 puntos

En lo que sigue utilizaremos notación compleja. Es decir identificaremos $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ y dado un punto $z \in \mathbb{C}$ denotareamos su parte real e imaginaria como $\mathfrak{Re}(z)$ e $\mathfrak{Im}(z)$ respectivamente.

Sea $\mathbb{S}^1$ el círculo unitario en $\mathbb{C}$.

Considera el conjunto $E \subseteq \mathbb{C}^2$ dado por:

$$X := \left\{(z, w) \middle| \, |z| = 1 \text{ y } w^2/z \in \mathbb{R}_{\geq 0}\right\}$$

- Demuestra que X visto como subconjunto de $\mathbb{R}^4$ es una 2-variedad conexa y no compacta.
- Demuestra que el conjunto

  $$X \cap (\mathbb{C} \times \{0\})$$

  es difeomorfo a $\mathbb{S}^1$.
- Demuestra que para cada punto $z \in \mathbb{S}^1$ el conjunto

  $$X \cap (\{z\} \times \mathbb{C})$$

  es un subespacio vectorial real de dimensión 1.

Ejercicio 10 — 5 puntos

Sea $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^3$. Considera la función cuadrática:

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto B(v, v) \end{aligned}$$

(a) ¿Qué condiciones deben cumplir B y $t \in \mathbb{R}$ para que $X(B, t) := q^{-1}(t)$ sea una 2-subvariedad de $\mathbb{R}^3$?

(b) En el caso en que $X(B, t)$ sea una 2-subvariedad, ¿en qué casos es compacta y en qué casos no?

(c) ¿Puedes dar una clasificación salvo difeomorfismo de las distintas 2-variedades que se obtienen como $X(B, t)$ para todos los posibles B y t?

Ejercicio 11 — 4 puntos

Considera la superficie de revolución que se obtiene al girar el conjunto:

$$S = \{(x, 0, z) | (x-2)^2 + z^2 = 1\}$$

a lo largo del eje z. Demuestra que dicho conjunto es una 2-variedad compacta y conexa, que además es difeomorfa a $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 12 — 3 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que f es diferenciable si y solo si para todo punto $p \in X$ existen cartas coordenads $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ y $\psi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ de X y Y respectivamente y tales que $p \in \mathcal{U}$ $f(p) \in \mathcal{V}$ y además la función $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en el sentido usual de cálculo.

Ejercicio 13 — 3 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 14 — 3 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 15 — 4 puntos

Sea $a > 0$. Considera el conjunto

$$X \coloneqq \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - z^2 = a\}.$$

Demuestra que X es una 2-variedad. Calcula (encuentra una base) el espacio tangente de X en $(\sqrt{a}, 0, 0)$.

Ejercicio 16 — 3 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Calcula el espacio tangente a la identidad:

$$T_{\mathrm{Id}}\, \mathrm{SO}(n).$$

Ejercicio 17 — 3 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) \coloneqq \{M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

Ejercicio 18 — 3 puntos

Sea X una variedad y $p \in X$. Demuestra que para todo vector tangente $v \in \mathrm{T}_p X$ existe una curva diferenciable $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to X$ tal que $\gamma(0) = p$ y además $\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$.

Ejercicio 19 — 3 puntos

Sea A una matriz $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Demuestra que la función lineal asociada a A deciende al cociente y da logar a una función continua de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ en sí mismo.

Ejercicio 20 — 2 puntos

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y $b \in \mathbb{R}^n$, demuestra que la función $x \mapsto T(x) + b$ es un difeomorfismo si y solo si T es un isomorfismo.

Ejercicio 21 — 2 puntos

Si $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ es un difeomorfismo local, demuestra que realmente es un difeomorfismo sobre su imagen, misma que es un intervalo abierto.

Ejercicio 22 — 3 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local entonces es un difeomorfismo sobre su imagen, misma que es un abierta.

Ejercicio 23 — 2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto que satisface que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ que

$$\varphi(\mathcal{U} \cap X) = \mathcal{V} \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right).$$

Demuestra que X es una k-variedad.

Ejercicio 24 — 2 puntos

Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto que satisface que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y un difeomorfismo $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ que

$$\varphi(\mathcal{U} \cap X) = \mathcal{V} \cap \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right).$$

Demuestra que para todo punto $p \in X$ existe una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ que es una sumersión y además cumple:

$$f^{-1}(0) = \mathcal{U} \cap X.$$

——— Fin de la tarea ———