Topología diferencial I

Tarea 7

Lista completa de ejercicios

Fecha de aplicación	**18 de septiembre de 2024**
Fecha de entrega	**24 de septiembre de 2024**
Puntos requeridos	**5**
Puntos máximos posibles	**58**

Ejercicio 1 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que la función producto tensorial

$$\otimes : V^* \times V^* \to T^2_0(V)$$

es bilineal y satisface que si $b : V^* \times V^* \to W$ es cualquier otra función bilineal, entonces existe una única función lineal $\tilde{b} : T^2_0(V) \to W$ tal que

$$\tilde{b} \circ \otimes = b.$$

Ejercicio 2 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $t : T^1_1(V) \to \mathbb{R}$ tal que $t(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$.

Si $T \in L(V, V)$ es una transformación lineal que en alguna base β de V está dada por una matríz M, y ω_T es el $\binom{1}{1}$-tensor que naturalmente corresponde T, calcula $t(\omega_T)$ en términos de M.

Ejercicio 3 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita.

Demuestra que existe una única transformación lineal $\sigma : T^2_0(V) \to T^2_0(V)$ tal que

$$\sigma(\alpha \otimes \omega) = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \omega + \omega \otimes \alpha).$$

A la imagen de σ se le llama el espacio de tensores simétricos y se denota $S^2(V)$ y al núcleo se le llama el espacio de tensores alternantes y se denota $\Lambda^2(V)$. A partir de una base para V encuentra bases para dichos espacios y calcula su dimensión.

Ejercicio 4 — 2 puntos

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Demuestra que $L(V, V)$ es naturalmente isomorfo a $T^1_1(V)$. Es decir, sin utilizar bases, define una transformación lineal $T : L(V, V) \to T^1_1(V)$ del espacio de endomorfismos lineales de V en el espacio de $\binom{1}{1}$-tensores sobre V y posteriormente demuestra que dicha transformación es un isomorfismo.

Ejercicio 5 — 2 puntos

Se dice que un tensor ω es descomponible si existen vectores $v_1, \ldots, v_m$ y covectores $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ tales que

$$\omega = v_1 \otimes \cdots \otimes v_m \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_\ell.$$

Exhibe un tensor que no es descomponible.

Ejercicio 6 — 2 puntos

Demuestra que una función $f : \mathbb{R}^k \times \{0\} \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable como función de un subconjunto de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ si y solo si la correspondiente función $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el sentido usual.

Ejercicio 7 — 2 puntos

Demuestra o exhibe un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local entonces es un difeomorfismo sobre su imagen, misma que es abierta.

Ejercicio 8 — 3 puntos

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Demuestra que f es suave.

(b) Sean $a < b$ dos reales. Muestra que la función $g(x) = f(x-a)f(b-x)$ es una función suave, positiva en (a, b) y cero en los demás puntos. Considera la función

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} g dx}{\int_{-\infty}^{\infty} g dx}.$$

Demuestra que es suave y es una función que se anula en $x < a$, es igual a 1 para $x > b$ y $0 < h(x) < 1$ para $x \in (a, b)$.

(c) Sean $0 < a < b$. Construye una función suave en $\mathbb{R}^k$ que sea igual a 1 en la bola de radio a, cero fuera de la bola de radio b y que sus valores estén estrictamente entre 0 y 1 en los demás puntos.

Ejercicio 9 — 2 puntos

Demuestra el lema de Hadamard:

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable definida sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que es estrellado con respecto a un punto $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{U}$, entonces existen funciones diferenciables $g_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i - p_i).$$

Además se cumple que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\big|_p$

Ejercicio 10 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una función entre dos variedades. Demuestra que el rango de f es localmente no decreciente.

Ejercicio 11 3 puntos

Considera la función $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f_n(z) = z^n$$

Demuestra que esta función se extiende a una única función diferenciable $F_n : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ mediante la proyección estereográfica.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcula la diferencial de F_n y encuentra los puntos críticos, valores críticos, valores regulares y conjuntos de nivel.

Ejercicio 12 3 puntos

Sean X y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitario. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable.

Demuestra que la función $f_* : \operatorname{Der}_p X \to \operatorname{Der}_{f(p)} Y$ dada por:

$$f_*(\delta)([g, \mathcal{U}]) := \delta([g \circ f, f^{-1}(\mathcal{U})])$$

está bien definida y es lineal.

Demuestra que la función $\mathcal{D} : T_pX \to \operatorname{Der}_p X$ que a cada vector tangente le asigna la derivación dada por la derivada direccional con respecto a dicho vector es un isomorfismo lineal.

Demuestra que para todo vector $v \in T_pX$ se cumple:

$$f_*(\mathcal{D}(v)) = \mathcal{D}(D_pf(v)).$$

Ejercicio 13 3 puntos

Sean $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitario. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable y sea $F : \mathcal{W} \to Y$ una extensión diferenciable de f a una vecindad abierta de p.

Sean $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{V}_1$ y $\psi : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{V}_2$ cartas de X y Y respectivamente y tales que $p \in \mathcal{U}_1$ y $f(p) \in \mathcal{U}_2$

Sea $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ la representación en coordenadas de f.

Para todo vector $v = D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(w) \in \mathrm{T}_p X$ demuestra que se cumple:

$$D_pF(v) = D_{\tilde{f}(\varphi(p))}\psi^{-1}(D_{\varphi(p)}\tilde{f}(w))$$

Es decir, la diferencial de f se puede calcular con la diferencial de una extensión local de f o con la diferencial de la representación de f con respecto a cartas arbitrarias.

Ejercicio 14 3 puntos

Sean X y Y dos variedades y $p \in X$ un punto arbitario. Sea $f : X \to Y$ una función diferenciable .

Demuestra que la función $T_p^G f : T_p^G X \to T_{f(p)}^G Y$ dada por $T_p^G f([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ es una función lineal.

Demuestra que la función $\mathcal{D}^G : T_p^G X \to \operatorname{Der}_p X$ que a cada vector tangente geométrico $[\gamma]$ le asigna la derivación dada por

$$[(f, \mathcal{U})] \mapsto \left.\frac{df \circ \gamma}{dt}\right|_0$$

es un isomorfismo.

Demuestra que para todo vector $v \in T_pX$ se cumple:

$$f_*(\mathcal{D}^G(v)) = \mathcal{D}^G(T_p^G f(v)).$$

Ejercicio 15 2 puntos

Considera $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$, que es una 1-variedad diferenciable. Describe explícitamente (mediante una base) al espacio tangente

$$T_x\mathbb{S}^1$$

para cada $x \in \mathbb{S}^1$.

Ejercicio 16 3 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Demuestra que la función

$$\mathfrak{ev} : \mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2 \times \operatorname{Der}_p(X) \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathfrak{ev}([\alpha], \delta) := \delta(\alpha)$ es un apareamiento bilineal bien definido y no degenerado entre los espacios vectoriales $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\operatorname{Der}_p(X)$, por lo que induce un isomorfismo entre $\mathfrak{M}_p/\mathfrak{M}_p^2$ y $\operatorname{Der}_p(X)^*$.

Ejercicio 17 2 puntos

Demuestra que si $f : X \to Y$ es una inmersión inyectiva con X una variedad compacta, entonces su imagen es una subvariedad de Y y f es un difeomorfismo entre X y dicha subvariedad.

Ejercicio 18 2 puntos

Sean X y Y dos variedades. Demuestra que si $Y \subseteq X$, entonces Y es una subvariedad de X.

Ejercicio 19 2 puntos

Sea X una varidad y Y una subvariedad de X. Demuestra que la función de inclusión de Y en X es una inmersión inyectiva.

Ejercicio 20 2 puntos

Sea $f : X \to Y$ una sumersión. Demuestra que f es una función abierta.

Ejercicio 21 2 puntos

Sea X una k-variedad y $p \in X$.

Definimos el tangente geométrico a X en p como el conjunto:

$$\mathrm{T}_p^G X := \left\{ [\gamma] \;\middle|\; \begin{array}{c} \gamma : (a,b) \to X \\ \text{es una función diferenciable} \\ \text{tal que } 0 \in (a,b) \text{ y } \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

donde $[\gamma] = [\eta]$ si y solo si $\dot{\gamma}(0) = \dot{\eta}(0)$.

Define operaciones de suma y producto por un escalar en dicho conjunto de tal forma que la función que a cada clase $[\gamma]$ le asigna $\dot{\gamma}(0)$ sea un isomorfismo entre $\mathrm{T}_p^G X$ y $\mathrm{T}_p X$.

Ejercicio 22 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un isomorfismo lineal T que permuta las coordenadas de $\mathbb{R}^n$, abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ vecindad de p y $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^{n-k}$ tales que

$$\phi(U) = \{(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) | (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{V}\}.$$

Es decir, salvo una permutación de las coordenads, toda variedad es localmente la gráfica de una función diferenciable.

Ejercicio 23 2 puntos

Si X es una k-variedad de $\mathbb{R}^n$ y $p \in X$ es un punto arbitrario, demuestra que existe un subconjunto de k funciones coordenadas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ tales que la función

$$f(x) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$$

restringida a una vecindad abierta de p en X es una carta coordenada.

Ejercicio 24 2 puntos

Considera el conjunto de matrices:

$$\mathrm{SO}(n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}) | MM^t = \mathrm{Id} \text{ y } \det(M) = 1\}.$$

Demuestra que $\mathrm{SO}(n)$ es una variedad diferenciable.

Ejercicio 25 2 puntos

Un k-marco ortonormal en $\mathbb{R}^n$ es una k-tupla de vectores $(v_1, \ldots, v_k)$ ortornomales.

Considera el conjunto $\mathrm{V}_n^k \subseteq \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ de k-marcos.

Demuestra que dicho conjunto es una variedad y calcula su dimensión. A dicho conjunto se le llama una variedad de Stiefel.

Ejercicio 26 2 puntos

Demuestra que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ son variedades diferenciales, entonces existe una variedad diferenciable Z tal que se puede descomponer como unión ajena de dos subespacios tal que uno es difeomorfo a X y el otro a Y.

——— Fin de la tarea ———